Gebruik /misbruik van wiskundige modellen in auditing, waaronder de Stringer-bound

door: Prof. dr. Martien van Zuijlen
Mathematisch Instituut
Radbouduniversiteit

29-05-2013

Kern van voordracht

Wiskunde:

onderwijs, importantie, imago

Gebruik en misbruik van wiskundige stellingen/modellen in auditing

Voorzichtigheid geboden:

- Aannamen bij stelling/model moeten vervuld zijn (ten minste bij benadering)!
- Generalisaties van bestaande wiskundige modellen? Nieuwe beweringen gelden?
- Voorbeeld: de Stringer-bound

Opmerkingen over het wiskundeonderwijs

- Vroeger: gepromoveerde wiskundeleraren.
- Veel diepgang, brede vakkennis, veel affiniteit met vak.
- Wiskunde gaat over abstracties, structuren en modellen.
- Aantrekkelijkheid vak leraar?
- Onderwijs heeft deuk opgelopen na jarenlange bezuinigingen en bedenkelijke visie.
- "Jeugd kan niet meer rekenen".

Grote betekenis van wiskunde

- Basiswetenschap met fundamentele toepassingen in:
  - Vrijwel alle takken van wetenschap: natuurkunde, informatica, sterrenkunde, scheikunde, biologie, sociale wetenschappen (psychologie), medische wetenschappen, economie, etc..
  - Bedrijfsleven en maatschappij: algoritmen voor programmatuur in mobiles, chips, elektronica, medische apparatuur, auto’s, telefonie, auditing, etc..

Slecht imago wiskunde

- “Is voor nerds”
- Deze nerds worden (werden) bepaald niet gestimuleerd op scholen.
- Maatschappij heeft deze studenten juist hard nodig om vooruit te komen (innovatie!).
- Klimaat is aan het veranderen:
  - In Nijmegen is het aantal wiskundestudenten de laatste jaren zeer sterk opgelopen jaar.
  - Vooruitzichten voor banen zijn prima.
  - Problemsolvers bij uitstek!

Wiskundig modelleren:

- Werkelijkheid beschrijven in wiskundige termen (model)
- Analyse uitwerken in model
- Conclusies weer vertalen naar werkelijkheid
- Vertaalslagen berusten op: gezond verstand, simplificaties, benaderingen, aannamen, verbeelding, kunst. Kwalitatieve aspecten verbinden met kwantitatieve aspecten.

Voorbeeld wiskundig model

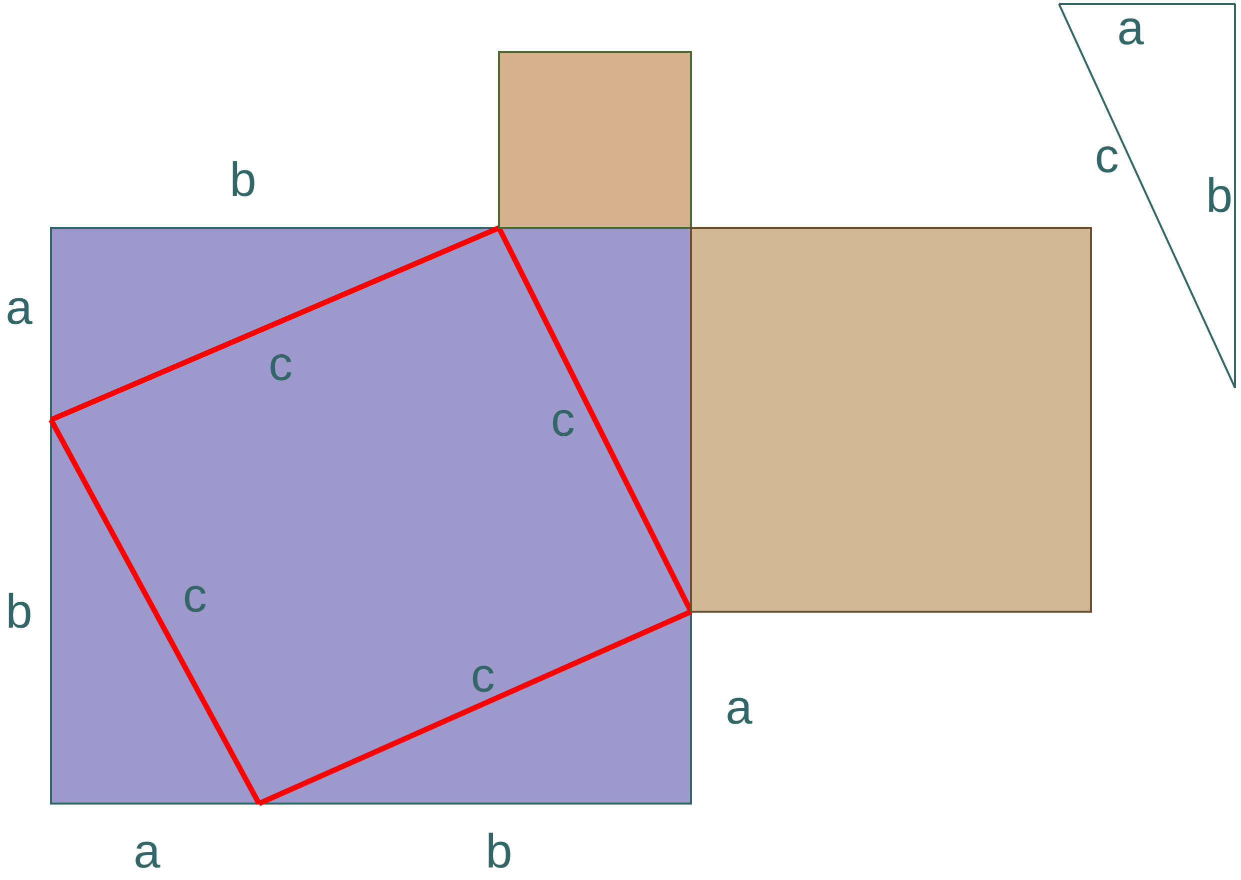
- Wiskunde op middelbare scholen?
- Bewijzen blijven vaak achterwege.
- Uitdaging voor goede studenten?
- Voorbeeld:

  elegant en zeer eenvoudig bewijs van beroemde model:

  “Stelling van Pythagoras”

  (Griekse wijsgeer, 600 voor Chr).

Bewijs Pythagoras:



$(a+b)^2 = c^2 + 4*ab/2$, dus: $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$

dus: $a^2 + b^2 = c^2$

Het gegeven van een rechte hoek is een cruciale aanname

Als de hoek ”bijna” recht is gelden benaderingen.

Hoe scherp zijn die dan?

Als aanname van rechte hoek totaal niet geldt dan zijn de gewenste uitspraken totaal onwaar.

In een andere context corresponderen rechte hoeken met onafhankelijkheid, ofwel met correlaties 0.

Als bijvoorbeeld bij financiële producten ten onrechte wordt aangenomen dat correlaties 0 zijn, dan leidt dat tot grote problemen! (Lee-model). Grote oorzaak van het ontstaan van de financiële crisis!

Misbruik van financieel model

- Math. whizzkid, David X. Li (2000): **’On default correlation: a copula approach’**
- F. Salmon (2009): **‘Recipe for disaster: the formula that killed Wall-Street’**
- Li: ingenieuze methode om default (wanbetaling) correlaties te modelleren
- Methode breed aanvaard in financiële wereld (toezichthouders, rating agencies, banken, etc)
- Leidde tot enorme expansie van verkopen en in 2008 tot grote meltdown sinds grote depressie

Uitleg

- Obligatiemarkt of bondmarkt stelt pensioenfondsen etc. in staat enorm veel geld uit te lenen (multitrillion)
- Bond: leencontract met belofte na bepaalde tijd hoofdsom terug te betalen, rente
- Ook m.b.v. onderpand: hypotheken
- Kansen op defaults (wanbetaling) en correlaties van defaults hierbij belangrijk
- Risico’s aanvaardbaar mits goed te prijzen
- Methode Li: **‘de oplossing’**
- CDS is bond ‘zonder hoofdsom’, alleen risico van default wordt verzekerd en verhandeld
- Geen beperking meer in volume. Leidde tot enorme expansie van markten

Waarschuwingen geuit:

- Tijdig, door wiskundigen en analisten (quants): Embrechts, Taleb, Wilmott en vele anderen
- Bankiers wisten ook dat de default correlaties zeer gevoelig waren voor de huizenprijzen, managers kenden de materie niet, kritische analisten werden nogal eens ontslagen
- Voorzichtigheid bij toepassen modellen dus geboden
- Technieken en modellen niet gebruiken als een black box!

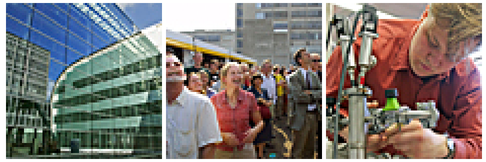
Ingewikkelde computermodellen maken transparantie lastig

WEET U PRECIES waarin u belegt? Of gelooft u het wel, zolang het maar iets oplevert? U bent niet de enige. Veel beleggers hebben er geen enkel probleem mee hun geld in een zogeheten black box te beleggen, als de rendementen maar kloppen. Oplichter Bernard Madoff bouwde op deze blinde vlek zijn miljardenimperium.

Toveren met een black box

door **MANNO VAN DEN BERG**

illustratie: Kees van de Nes



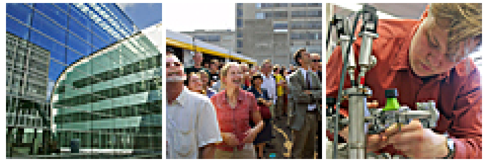
Terug naar Auditing

Auditing algemeen
Problemen bij gebruik van standaard statistische procedures in auditing
Binomiale bovengrens voor de fout
Stringer bound en het gebruik ervan in auditing

- Recente ontwikkelingen (via grootschalig STW-project):
  Nieuwe statistische bovengrenzen voor totale fout
  Gebruik van voorinformatie (via professional judgement)
  In 1-steekproefprobleem, maar ook k-steekproevenprobleem

- Gebaseerd op:
  relatie kansbovengrenzen en betrouwbaarheidsbovengrenzen

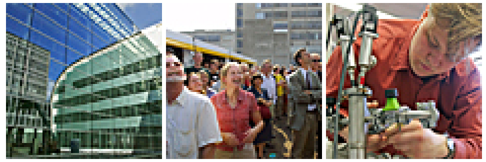
Stuurgroep Statistical Auditing speelde in onderzoek als klankbord een zeer belangrijke rol



Problemen bij gebruik standaard procedures

- In test of details:
  - vaak steekproeven,
  - vaak gebruik betrouwbaarheidsbovengrenzen
    - (statistische bovengrenzen) voor totale fout in audit-populatie
    - Expected maximal misstatement (EMM)
- Problemen:
  - onbekende verdelingen,
  - discrete componenten,
  - scheve verdelingen,
  - veel nullen,
  - geen normaliteit (klassieke statistiek),
  - geen asymptotiek te gebruiken (steekproefomvang is klein),

Dus: standaard statistische procedures niet toepasbaar en verdelingsvrije aanpak noodzakelijk.



Mathematische beschrijving audit-probleem bij 1 steekproef

- Audit populatie **A**, N boekwaarden van posten: $\mathbf{A}=\{A_1,A_2\ldots,A_N\}$
- Totale boekwaarde: $A= A_1+A_2+\ldots+A_N$
- Fouten in boekwaarden: $E_1,E_2\ldots,E_N$
- Overstatements, dus voor alle i: $0 \leq E_i \leq A_i$
- Totale fout: $E= E_1+E_2+\ldots+E_N$

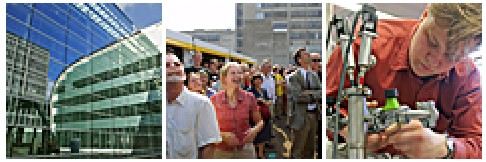
Steekproef

- “Dollar unit sampling” uit posten (PPS, met teruglegging)

- Steekproefresultaat: n nullen of enen (“all or nothing”):
  als dollar in steekproef goed is (of goed wordt gerekend) dan noteer 1, anders 0.

- Totaal aantal fouten in steekproef := X
  dus: X= # [enen] = # [foute dollars in steekproef]

Merk op:
X is binomiaal verdeeld met parameters n en p, waarbij
p = fractie foute dollars in populatie



Binomiale grens

- Als p = totaal van foute $'s, gedeeld door A, dan geldt: $E = A.p$

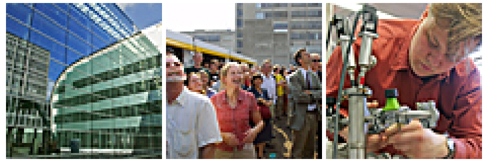
- $B^{bin}(n,x)$ = die foutenfractie q met $\mathbf{P}(Bin(n,q) \leq x) = 95\%$

  dus: kans op hooguit x fouten bij foutenfractie q is 95%,
  bij q=0 is die kans 100%, bij q=1 is die kans 0%

- Merk op: $B^{bin}(n,X)$= is een 95%-betrouwbaarheidsbovengrens voor de onbekende p, d.w.z.

  $$\mathbf{P}(p < B^{bin}(n,X)) \geq 95\%$$

  en dus $\mathbf{P}(A.p < A*B^{bin}(n,X)) \geq 95\%$ en dus …



Voorzichtigheid geboden. Voorbeeld:

- A=1.000.000, n=100, E=aantal fouten in populatie, materialiteit = 50.000 = 5% van A
- X=aantal fouten in steekproef~ Poi(E/J), met J=A/n=10.000
- Theorie: 95% bovengrens voor E bij 0 fouten: 3J

  bij 1 fout: 4,75 J

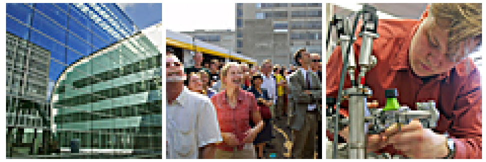
  bij 2 fouten: 6,3 J

Nu: personele kosten: 350.000, materiaalkosten: 650.000

Bij 2 gevonden fouten: bov.grens= 63.000, niet goedkeuren!

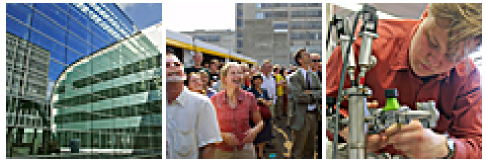
Interne accountant: fouten typisch personele kostenfout.

Volledig onderzoeken, totaal 17.500 fout daarin, dan 0 fouten in rest;over 95% bovengr.: 30.000+17.500=47.500, goedkeuren?



Fout in redenering:

- Plots wordt steekproef beschouwd als 2 onafhankelijke steekproeven, een vervuilde en een schone. Stel nu
- X~Bin(35, p=5%), Y~Bin(65, 5%), zodat X+Y~Bin(100,5%)
- **P**(X+Y=0) = exp(-E/J) = exp(-5) = 0.0067
- **P**(X+Y≤ 1) = 0,0404
- **P**(X=2,Y=0) = 0,0103
- Samen met de kans op geen of 1 fout dus: 0,0507, meer dan gedacht!
- **P**(X=2 of meer, Y=0) = 0.0202, samen dus zelfs 0,0606
- Werken met hypergeometrische verdeling? Balletjes, vierkantjes, fout en goed?
- Literatuur: H. Hendriks e.a. (Proc. 48-th Eur. Study Group Math. With Industry, 2009?)
- Gewone fouten, incidentele en isoleerbare fouten?



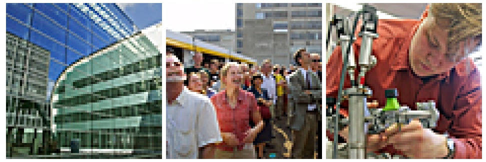
De Stringer bound

Ook gebruik de relatieve fouten mogelijk:

de taintings: $t_i = E_i/A_i$, $i=1,2,\ldots,N$.

Weer binomiale grens toepasbaar, bij toepassing van bepaalde procedure om van taintings nullen en enen te maken.

- Stringer (1976?) gebruikte de taintings: Stringer bound. Ingewikkelde betrouwbaarheidsbovengrens. Geldigheid?
- Recent onderzoek: Stringer bound geldt niet i.h.a.. (Tegenvoorbeelden ontwikkeld)
- Asymptotisch gedrag geheel ontrafeld
- Alternatieven voor de Stringer bound? Ja, en die zijn wiskundig bewezen (STW-project)!



Samenvatting:

Wees voorzichtig met uitspraken/beweringen in niet-standaard steekproefsituaties.

Wees voorzichtig met het gebruiken van bekende elementen (stellingen) uit standaard modellen in gegeneraliseerde modellen

Ook indien standaard procedures worden gevolg, moet worden nagegaan of aan de basisveronderstellingen is voldaan.